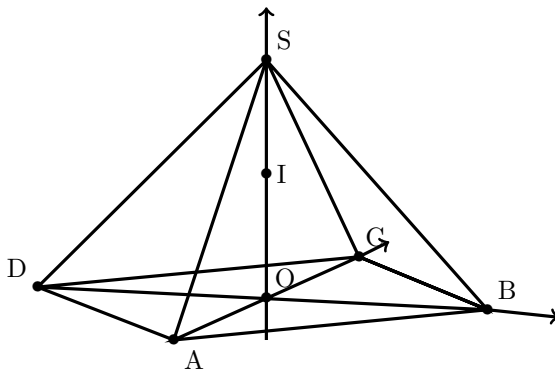


Exercice 1 (D'après le sujet de bac Amérique du nord, 1^{er} juin 2016).

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $(O ; \vec{OB}, \vec{OD}, \vec{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O ; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$.

2. On définit le point K par la relation $\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

- (a) Déterminer les coordonnées du point K .
- (b) En déduire que les points B , I et K sont alignés.
- (c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI) . Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
- (d) Déterminer les coordonnées du point L .

3. On considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O ; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$.

- (a) Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (BCI) .
- (b) Montrer que les vecteurs \vec{n} , \vec{AS} et \vec{DS} sont coplanaires.
- (c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Exercice 2 (D'après le sujet de bac Amérique du nord, 1^{er} juin 2016).

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n -ième tirage.

- (a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1).$$

(b) Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

- Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2))$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $(0 \quad 0 \quad 1)$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n , $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n , $R_n = R_0 \times M^n$.

- On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n , $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n , $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n .

(b) Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n .

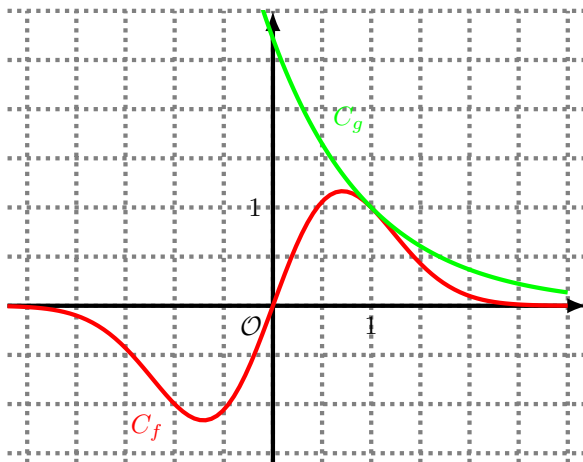
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2)$.

Interpréter ces résultats.

Exercice 3 (D'après le sujet de bac Antilles–Guyane, 20 juin 2016).

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

(a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- (b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
- (c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
(b) Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .
(c) Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

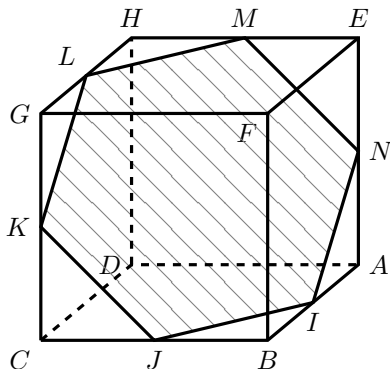
Exercice 4 (D'après le sujet de bac Antilles–Guyane, 20 juin 2016).

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a : $D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$, $H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets $I, J, K, L, M,$ et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.

1. (a) Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (BGE) .
 (b) En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .
 (b) En déduire que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.